

10/5/21

Επανάληψη... Οι πιο εύκολα διαχειρίσιμοι πίνακες είναι οι διαγώνιοι, όμως δεν είναι όλοι οι πίνακες διαγώνιοι
 $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ή $M(n \times n, \mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ διαγώνιος}$$

A : τωχάις σχετίζεται με διαγώνιο: Διαγωνοποιείται
 $Au = \lambda u$ Η εύρεση των ιδιοτιμών γίνεται με
 $\uparrow \quad \uparrow$ ιδιοτιμή $\chi_A(\lambda)$: χαρακτηριστικό ελάχιστο
ιδιοδιάνυσμα

Ιδιοχώροι $V(\lambda) = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid Au = \lambda u \} \leq \mathbb{R}^n$

A διαγωνοποιείται αν ∇ έχει n -γραμμικά ανεξάρτητα
ιδιοδιανύσματα $\Leftrightarrow \dim V(\lambda) = 1$ για τις ιδιοτιμές λ για
κάθε ιδιοτιμή $\Leftrightarrow A = P \Lambda P^{-1}$ Λ : διαγώνιος $\Leftrightarrow$ Το ελάχιστο
πολλύμο είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων διαφορετικών πολλών

Οι πραγματικοί συμμετρικοί (και οι ερμιτιανοί) διαγωνοποιούνται
πάντα

Οι ιδιοτιμές τους είναι πραγματικοί αριθμοί
Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων, δηλ. υπάρχει
ορθογώνιος πίνακας P και διαγώνιος Λ ώστε $A = P \cdot \Lambda \cdot P^t$

Αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές μαθαίνει θετικό ορισμένο. $\langle Au, u \rangle > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$

Με τη βοήθεια ενός θετικού ορισμένου πίνακα μπορούμε να κατασκευάσουμε νέο εσωτερικό γινόμενο

Εξετάζουμε αν είναι θετικό ορισμένο με το κρίτήριο του Sylvester

$$\text{αν } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \dots \det A > 0$$

Το γινόμενο των ιδιοτιμών του $A = \det A$

Το άθροισμα $-II - \dots - II - = \text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

$A = P \cdot \Lambda \cdot P^{-1}$ Ο P είναι πίνακας αλλαγής βάσης από μια βάση που δίνεται από ιδιοδιανύσματα του A στην κανονική

P ορθογώνιος πίνακας $\Leftrightarrow P^{-1} = P^T$ ή $P \cdot P^T = I$

οι στήλες (γραμμές) αποτελούν ορθοκανονική βάση

$\det P = \pm 1$

$Pu = \lambda u \Rightarrow |\lambda| = 1$ (λογιστεί το λ μπορεί να είναι μιγαδικός)

Αν $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = \pm 1$

2x2 ορθογώνιοι πίνακες $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$

Δίνει στροφή κατά γωνία φ $\checkmark$ $\det = 1$ ή $\checkmark$ $\det = -1$

Το αυτό δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές

Δίνει απίπλευση ως προς άξονα που σχηματίζει γωνία

Λήμμα Euler: Α 3x3 ορθογώνιος, $\det A = 1$ $\neq 1$ με ιδιοτιμές ± 1 του x^2

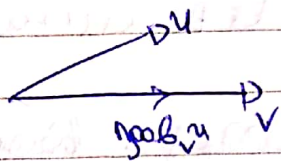
$\Rightarrow$ δίνει στροφή ως προς επίπεδο το οποίο είναι $\perp$ στον άξονα που υπολογίζεται από τον υποσπί 1

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} P^t$$

Ευκλείδειος Χώρος : V^N δ.χ. εξοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο
 $\langle -, - \rangle : V^N \times V^N \rightarrow \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες
 $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$, $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
 $\langle u, u \rangle \geq 0$ και ο συν $u = \vec{0}$

Ορίζουμε μήκος $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ονομάζουμε $\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$

Προβολή ενός διανύσματος u σ' ένα άλλο v



$$\text{προβ}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

Προβολή ενός διανύσματος u σ' έναν υπόχωρο $W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$
 ορθοκανονική βάση

$$\text{προβ}_W(u) = \text{προβ}_{w_1}(u) + \text{προβ}_{w_2}(u) + \dots + \text{προβ}_{w_k}(u)$$

Λεπίδα G-S: $\{u_1, \dots, u_k\}$ β. ανεξ. $\rightarrow \{w_1, \dots, w_k\}$ ορθοκανονική βάση ώστε $\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \quad \dots \quad \text{ορθοκανονική διανύσματα!!}$$

Ισομετρία $T: V^M \rightarrow W^M$ γραμμική ($\neq$) $\langle Tu, Tv \rangle^I = \langle u, v \rangle^I$

Οι ισομετρίες σέβονται το μήκος $\underbrace{\langle Tu, Tv \rangle^I}_{\text{εσωτ. γινόμενο στο } W}$ $\underbrace{\langle u, v \rangle^I}_{\text{εσωτ. γινόμενο στο } V}$
και τις γωνίες W V

Μεταξύ 2 ισοδιάστατων Ευκλείδειων χώρων V^M και W^M ορίζεται πάντα ισομετρία ως εξής: Θεωρούμε ορθοκανονικές βάσεις $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και $W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ και ορίζουμε $T(v_i) = w_i$ και $T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$. Ο πίνακας ισομετρίας ως προς ορθοκανονικές βάσεις είναι ορθογώνιος και αντίστροφος.